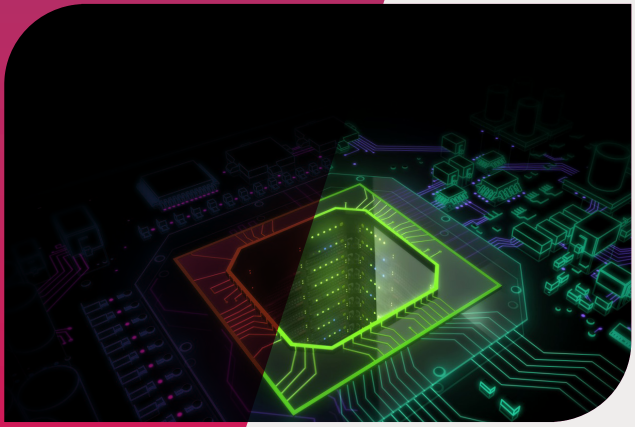
YIAFL MATHS

E-DERGI

SAYI 03

Kartal Yüksel - İlhan Alanyalı Fen Lisesi

İÇİNDEKİLER



DİĞER

HOŞGELDİNİZ

Merhaba Matematik Severler,
Yoğun bir mesai harcayarak tamamlanan matematik dergimizin 3. sayısı ile yine karşınızdayız. İçinde neler mi var?
Daha önceki sayılarda olduğu gibi yine keyifle okuyacağınız ve sizi matematiğin gizemli dünyasında kısa bir yolculuğa çıkaracak şaşırtıcı içeriklerimiz olacak elbette. Umarım beğenirsiniz.
Tabiki derginin hazırlanmasında öncelikle fikir babası **Baran YÜCEL**’i unutmamak gerekir. Ayrıca Öğrencilerimiz **Samet ZENGİN** ve **Yusuf Tuna EKMEKÇİ** derginin ortaya çıkmasında inanılmaz bir özveride bulunmuşlardır. Her birine emekleri için teşekkür ediyor, sizleri matematiğin eğlenceli yönleriyle baş başa bırakıyoruz. Keyifle okumanız dileğiyle...

Güner ERTUĞ - Matematik Öğretmeni

YIAFL**MATHS**

TURING MAKİNELERİ

Alan Turing 1936'da hesaplamanın matematiksel modelini kurdu. Bu modelde, günümüzde Turing makinesi olarak adlandırılan soyut bir makine vardır.

Bilgisayarların temel prensiplerini belirleyen Bilgisayar bilimcisi, kriptolog ve İngiliz matematikçidir.

Alan Turing'in bilgisayar biliminin temellerini atarken tanımladığı soyut Turing makinelerinin çalışma ilkesi gayet basittir. Makine sonsuz uzunlukta olduğu varsayılan bir şeridin üzerine yazılmış girdileri okur ve işler, çıktıları da yine bu şeridin üzerine yazar. Şerit, her biri sadece tek bir sembol içeren ya da boş olan karelere bölünmüştür. Makinenin kafası her seferinde sadece bir kareyi okuyabilir. Okuduğu veriyi işledikten sonra o karedeki sembolü silerek yeniden yazabilir ya da hiçbir şey yapmayabilir.

Herhangi bir algoritmayı uygulayacak Turing makinesi kurmak mümkündür. Bu sebeple algoritma kavramının matematiksel tanımı olarak Turing makineleri kullanılır.

Bilgisayar bilimindeki temel kavramlardan biri hesaplanabilirliktir. En genel anlamıyla bir soruyu çözebilme yetisini ifade eder. Bir sorunun hesaplanabilirliği, o soruyu çözmek için kullanabilecek bir algoritmanın varlığıyla yakından ilişkilidir. Alan Turing, 1936 yılında hesaplanabilirlikle ilgili temel bir sorunun "karar verilemez" olduğunu ispatladı. "Durma problemi" olarak adlandırılan bu problem, herhangi bir girdiyi işleyen herhangi bir bilgisayar programının eninde sorunda durup durmayacağını söyleyecek genel bir algoritma olup olmadığını sorar.

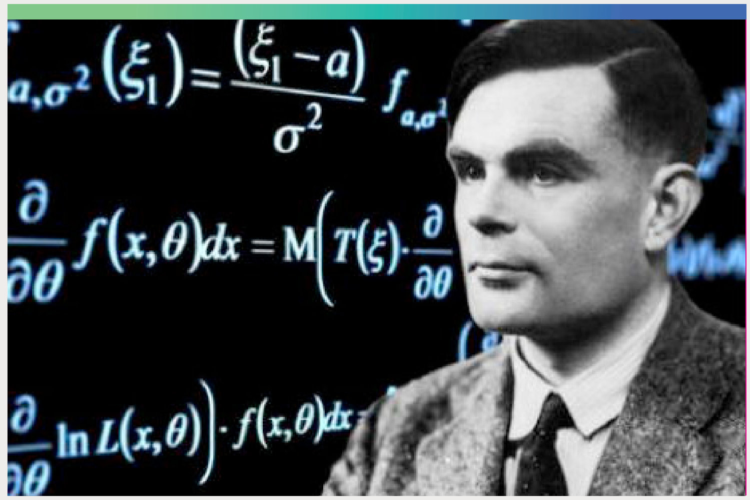
Bir algoritmayı uygulayacak bir Turing makinesi kurduğunuzu ve girdiyi sonsuz uzunluktaki bandın üzerine yazıp makineye verdiğinizi düşünün. Verileri okuyup işlemeye başlayan makine bir süre sonra durup size cevabı mı verir, yoksa sonsuza kadar çalışmaya devam mı eder?

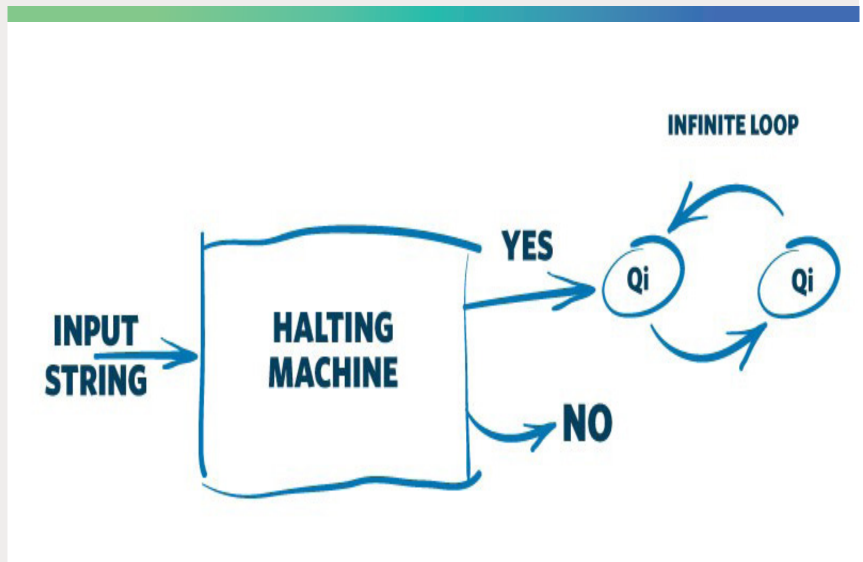
Bu sorunun cevabını verecek genel bir algoritma var mıdır?

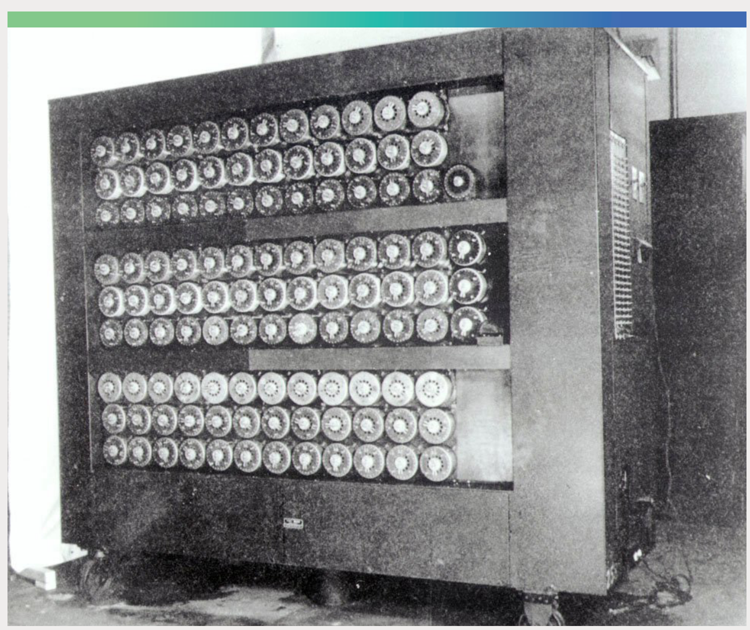
Alan Turing durma probleminin karar verilemez olduğunu, yani herhangi bir iş için üretilmiş bir Turing makinesine herhangi bir girdi verildiğinde makinenin eninde sonunda durup durmayacağını söyleyebilecek genel bir algoritma olmadığını ispatladı.

Durma probleminin karar verilemez olması, bir Turing makinesinin durup durmayacağının hiçbir zaman bilinemeyeceği anlamına gelmez. Örneğin makineye verilen tek komut “Okuduğun veriyi sil ve dur” ise makinenin ilk okuduğu veriden sonra duracağı açıktır. Ya da makineye verilen tek komut “Sıfır yaz ve bir birim sağa kay” ise makinenin sonsuz uzunluktaki bant üzerinde hiç durmadan sürekli sıfır yazarak ilerleyeceği açıktır.

Ancak Turing’in ispatı makinenin durup durmayacağını belirlemenin tek yolunun makineyi çalıştırıp beklemek olduğunu söyler. Eğer makine bir noktada durup size cevabı verirse durduğunu bilirsiniz. Ancak bir süre önce çalıştırdığınız makine hâlâ verileri işleyip çalışmaya devam ediyorsa bir süre sonra durup durmayacağını kesin olarak söyleyemezsiniz.







Avagadro Sayısı Sayılabilir mi?

Matematik, fizik ve kimya gibi bilim dallarında çeşitli katsayıları ve sabit sayıları hesaplamalarda kullanmaktayız. Bunlardan biri de, defalarca karşımıza çıkmış olan Avagadro sayısıdır.

Avogadro yasası, “aynı sıcaklık ve basınç altında, eşit hacme sahip gazlar, eşit sayıda molekül içerir” der.

Avogadro sayısı bir elementin bir molündeki atom sayısı ya da bir bileşiğin bir molündeki molekül sayısıdır ve 6.023×1023’tür.

Herhangi bir maddedeki atom sayısını hesaplamak için ilk çalışmaları yapan kişi Avusturyalı bir öğretmen olan Johann Josef Loschmidt (1821–1895) tir. Loschmidt 1865 yılında, o zamanlar çok yeni olan kinetik moleküler teori yardımıyla, 1 cm3 gaz içerisinde normal sıcaklık ve basınç şartlarında yaklaşık 2.6×1019 molekül olduğunu hesaplamıştır. Bu değer Loschmidt sabiti olarak bilinir.

Daha sonra çeşitli bilim insanları tarafından yapılan araştırmalar sonucunda maddelerdeki molekül sayılarıyla ilgili farklı öneriler geliştirilmiştir. Nihai aşama sonucunda İtalyan bilim insanı Amedeo Avogadro’nun bu konudaki çalışmaları anısına 1 mol elementteki atom sayısına Avagadro sayısı denilmiştir. Jean Baptiste Jean Perrin (1926 Nobel adayı), Avogadro sayısı terimini 1909 yılında bir makalesinde kullanmış ve bu terimi ilk kez kullanan insan olmuştur.
Biraz bu sayıyı inceleyelim…

6.023×1023 sayısı hayal bile edemeyeceğimiz kadar büyük bir sayıdır.

Bugün Türkiye’nin nüfusu yaklaşık olarak 80 milyondur. Bu insanların tamamından 24 saat durmadan saniyede 1 atom saymasını isteyelim.

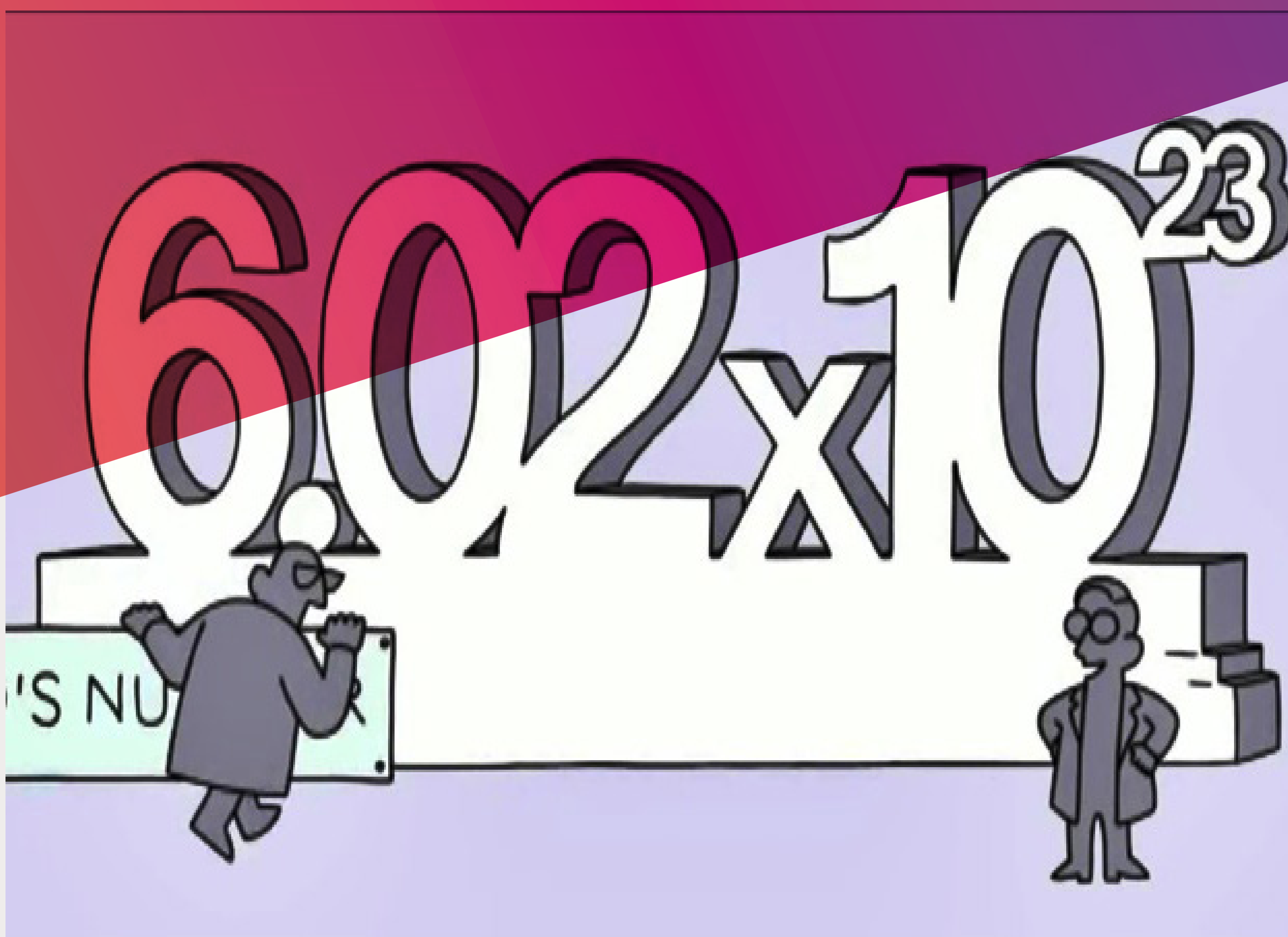
266 MİLYON YIL

Böylelikle 1 insan, 1 dakikada 60 atom, 1 saatte 3600 atom ve 1 günde ise 86400 atom sayacaktır. 1 yılda sayacağı atom sayısı yaklaşık olarak 31.5×106 tanedir ve toplam nüfusun 1 yıl sonunda ulaşacağı rakam 2.52×1015 'tir.

Avagadro sayısına ulaşabilmek için yaklaşık olarak aradan 266 milyon yıl geçmesi gerekir bu da hayalden başka bir şey değildir ve Avagadro sayısının büyüklüğünün ispatıdır.

Bu sayının büyüklüğünün bize gösterdiği bir başka şey ise her elementin her yerde bulunduğudur, çünkü her elementin en azından birkaç atomunu her yerde saptayabiliriz bu da bize aslında hiçbir maddenin gerçekten yüzde yüz saf olamayacağını gösterir.

Günümüzde Avodagro sayısının hesaplanabilmesi için bir çok deneysel yöntem geliştirilmistir. Ve bu ölçümlere dayanarak su an kabul edilen Avogadro sayısı ise 6.02214199 x 1023 kadardır.



Günlük yaşamımızda genellikle matematiğin işe yaramayacağını düşünürüz, oysa ki matematik bizimle birlikte doğar.

PARMAKİZİ

TOPOLOJİSİ

SAÇ DÖNGÜSÜ

Bizi şifreleyen DNA'mızda, bizim kim olduğumuzu ele veren parmak izimizde bile matematik vardır. O halde, haydi gelin, şimdi hep birlikte rotamızı, soruların cevap bulduğu ve gerçeğin var olduğu yere doğru çevirelim ve matematik limanına doğru bir seyahate çıkalım.

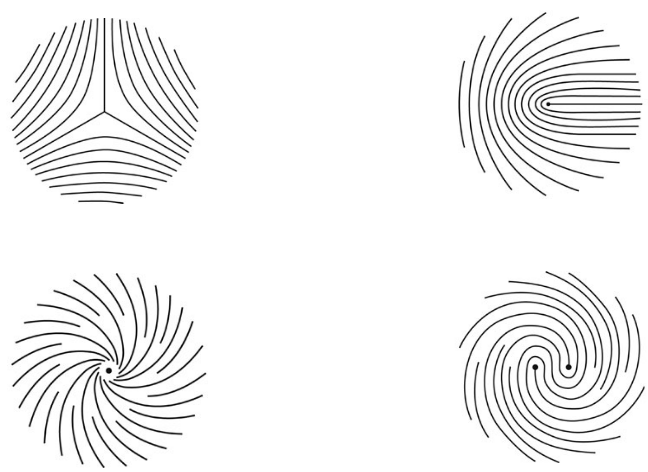
“Matematik bizimle birlikte doğar,” iddiasında bulunduktan sonra, bedenimizin bize matematikle ilgili öğretebilecekleriyle işe başlamak, beklenen bir yönelim olur, öyle değil mi? Çocukların sayı saymayı el ve hatta bazen ayak parmaklarıyla öğrenmeye başladığını hepimiz biliyoruz. Vücudumuzun parmak ismini verdiğimiz bu uzantıları, tıp dilinde digit(digitus) olarak adlandırılır. Aynı kelimenin 10luk sayma sisteminde 0'dan 9'a kadar olan sayıların her birini de temsil etmesi basit bir tesadüften ibaret değildir. Vücudumuz bizim ilk aritmetik (matematiğin sayıları, sayılar arasındaki bağıntıları ve işlemleri konu alan dalı) öğretmenimizdir. Bedenimiz ayrıca, ona izin verdiğimiz ve işaretleri doğru okuyup, yorumladığımız sürece, bizlere yüksek matematik de öğretmeye çalışır. Şimdi gelin, bunun için, hep birlikte yeni doğmuş bir bebeğin saçlarına bakalım:

SAÇ DÖNGÜSÜ

Bu, tatlı küçük kafanın tepesindeki "saç döngüsü" adı verilen ve çevresindeki saç tellerinin aksi yönünde hareket etme eğilimi gösteren saç kümesi, bebeğin saç tellerinin nereye doğru uzayacağını bilemediği bir karmaşıklık, matematiksel tabiriyle bir tekillik noktasıdır. Bu saç kümesinin arka tarafındaki saçlar sola, ön tarafındaki saçlar sağa, yanlardaki saçlar ise canları nereye isterse oraya doğru uzar. Başın tam tepe noktasındaki bu saç döngüsünü tekil yapan şey, tam tepe noktadasında birdenbire ve düzensiz olarak değişen bir değişken (saçın yönü) dir.

Tekillikler söz konusu olduğunda, sadece bedenimizden bahsetmek doğru olmaz. Doğanın kendisi de tekilliklerle doludur. Bir kasırga hayal edelim. Kasırganın odağındaki rüzgar, herhangi bir yöne esmez, fakat odaktaki rüzgara yakın rüzgarlar her yöne eser. Eşit derecede mantığa aykırı gibi gelen bir başka şey de Kuzey Kutbu'nda gerçekleşir. Eğer Lewis Carroll'un tarzına uyarak, Kuzey Kutbu'nda saatin kaç olduğunu sorarsanız, alacağınız en mantıklı cevap size bir şaka gibi gelebilir: bütün zamanlar. Gerçekten, içinde yaşadığımız zaman dilimleri, Kuzey Kutbu'nda yer alan ve bizi tekilliğe götüren tek bir noktaya yönelir. Bu tekillik noktasının bir adım dışına çıkarsak, kendimizi, farklı boylam çizgileri arasında yer alan herhangi bir zaman dilimine yerleştirebiliriz.

Tekillikler, doğanın uyumsuzlukları giderme ve her şeye rağmen sürekliliği devam ettirme girişiminden başka bir şey değildir. Saç tellerinin yönleri, rüzgar hareketleri veya zaman dilimleri arasında uyumsuzluk söz konusu olduğunda, bu uyumsuzlukları gidermek için doğanın bulduğu çözüm, onları olabilecek en küçük noktaya (tek bir noktaya) hapsetmek olmuştur. Tekilliklerin en dikkat çekici özelliklerinden birisi de devamlılıklarıdır. Büyüdükçe kafa tasınız ve kafa deriniz de sizinle birlikte büyür, fakat kafanızın tepesindeki o saç döneği asla kaybolmaz.



TOPOLOJİ

Parmak uçlarımıza baktığımızda, sadece birkaç değişik türde tekillik olduğunu fark edebiliriz. Bunlardan en çok bilinen iki tanesi triradius (üçyarıçap) ve ilmektir:

Diğer tüm tekillikler bu ikisinden elde edilebilir. Örneğin, düğüm olarak bilinen tekillik çeşidi iki ilmeğin birleşimine karşılık gelir:

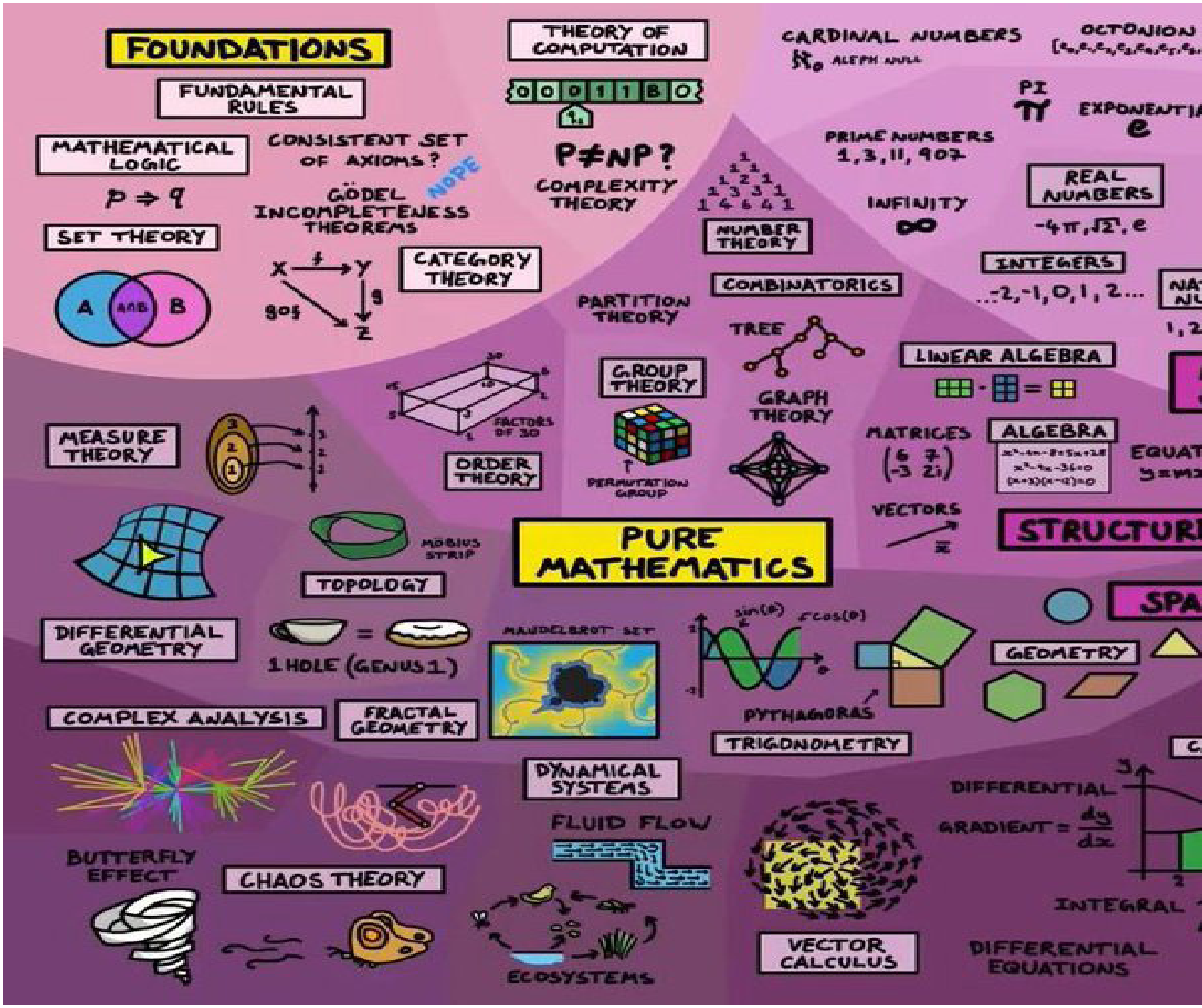
1965'te, İngiliz medikal genetikçi Lionel Penrose, parmak ve avuç içi izlerinin evrensel bir kurala uyduğunu göstermiştir. Bu kurala göre, kişisel örüntülerin neye benzediğinden bağımsız olarak, beş parmağa sahip olan herkes,. ilmeklerden dört fazla sayıda triradius-a sahip!

Burada şöyle inanılmaz bir ironi var: parmak ve avuç içlerimiz her ne kadar; bizim, birbirimizden ayırt edilmemize olanak sağlayan belirginliklerimiz olarak anılsa da, bu izlerin geometrileri arasındaki fark o kadar da belirgin değil. Yani aynı topolojik kural hepimiz için geçerli! Penrose, bulduğu bu kuralı, bazı genetik anormalliklerden dolayı beş parmaktan farklı sayıda parmakla doğan insanları da kapsayacak biçimde genelleştirdi ortaya şöyle bir formül çıktı:

T-L=D-1
Burada, D her eldeki parmak sayısını, T eldeki triradiusların ve L de ilmeklerin sayılarını belirtiyor. Penrose'un kuralına göre, bir eldeki triradiuslarla, ilmekler arasındaki fark, eldeki parmak sayısından bir eksik.

1979'da Penrose'un, bir matematiksel fizikçi olan oğlu Roger, babasına ithaf ettiği ilgi çekici makalesinde, babasının bulduğu bu kuralın topolojik olarak da doğru olduğunu kanıtladı.

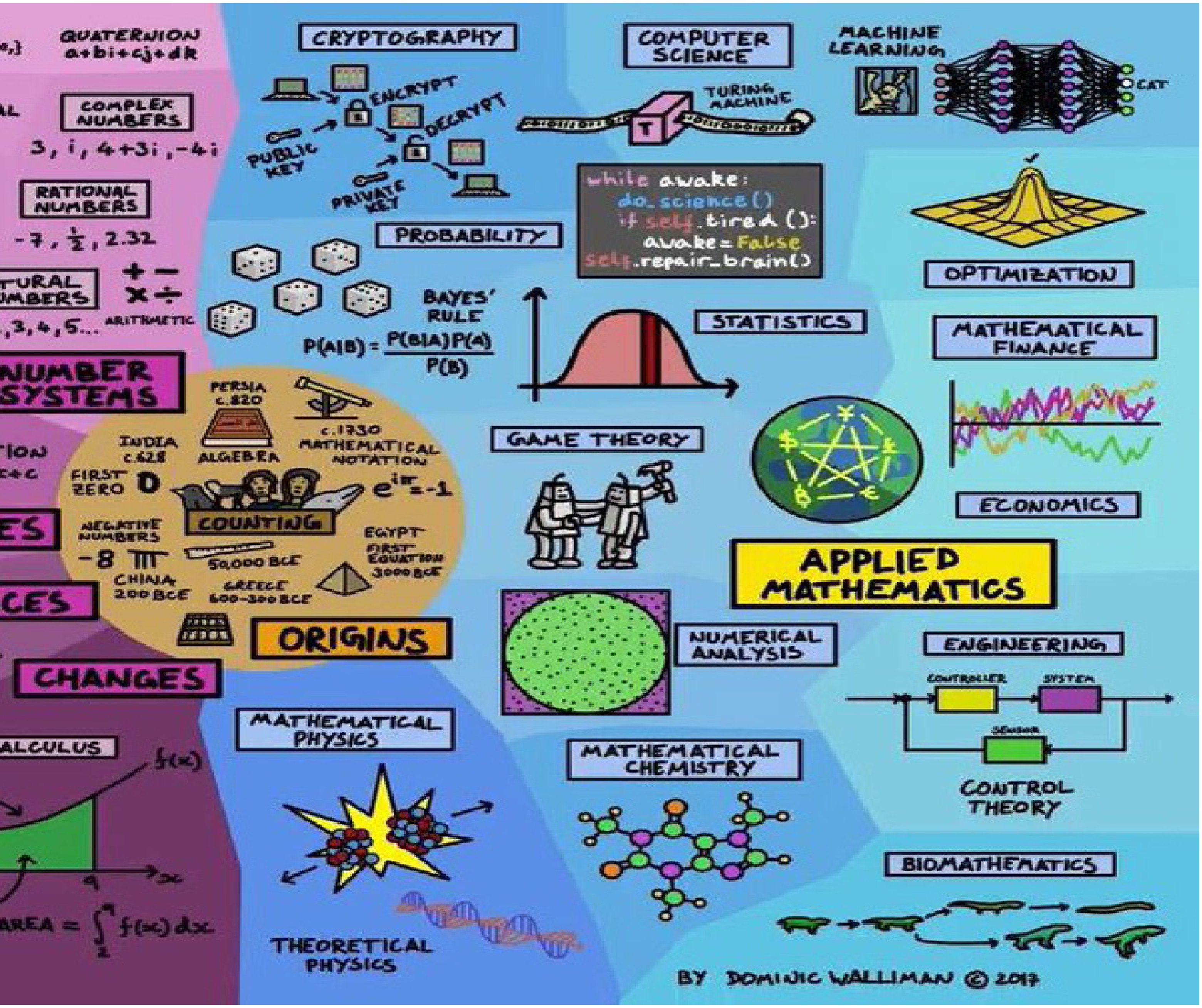
Bu yazıyı, Sherlock Holmes'un, Art'ın da söylemekten oldukça keyif aldığı, şu sözüyle bitirmek istiyorum: "Singularity is almost invariably a clue. (Tekillik, adeta kaçınılmaz bir ipucudur.)"



MATEMATİĞİN HARİTASI

Modern matematik aslında iki temel başlık altında sınıflandırılabilinir: Soyut Matematik (Pure Mathematics) Matematik adına yapılan matematik, Uygulamalı Matematik (Applied Mathematics) Diğer bilim dalları ve gerçek hayatta karşılaşılan sorunları için yapılan matematik İki ayrık dal gibi gözüktüklerine bakmayın aslında örtüştükleri çok nokta vardır. Aslında tarihte pek çok kere matematikçiler bulundukları dönemde ne işe yarayacaklarını pek de bilemedikleri çıkarımları sezgileri ile bulmuş ve ancak çok zaman sonra bir başkası gelişen teknoloji yardımı ile bu bulgunun hayatta karşılaşılan önemli bir problemin çözümü için gerekli olduğunu fark etmiştir. Size bundan sonra anlatacaklarımız keskin sınırlarla bölmek pek de doğru değil çünkü matematikte her konu bir diğeriyle geçişlidir, bir diğerinin gerekliliğidir ancak amacımız başta da dediğimiz gibi kafanızda büyük resmin canlanmasını sağlamak. – Soyut matematik altında pek çok konu irdelenir. Bunların ilki sayılar teorisidir. En başlangıcında doğal sayılar ve dört işlem vardır elbette. Devamında tamsayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, reel sayılar ve karmaşık sayılar gelir. Elbette bu sayı sistemlerinin de özellikleri vardır kendilerine has. Bu arada sonsuzlukta buralarda bir yerlerdedir…

– Bir başka grupta da matematiği yapısal özellikleri ile ele alabiliriz. Bu sefer işin içine denklemler ve dolayısıyla cebir karışmaya başlar. Yapılar dediğimiz zaman aklımıza aynı zamanda vektörler, matrisler de gelir. Her yeni sistemin özellikleri de vardır elbette bunu incelemekte lineer cebirin işidir.



– Soyut matematikte bir de kombinatorik dediğimiz kısım vardır. Adı gibi uğraştığı alt konularda gariptir, soyuttur aslında. Kombinatorik belirli kriterleri karşılayan nesnelerin sayılması, kriterleri karşılayan nesnelerin inşa ve analiz edilmesi, bu nesnelerin sahip olabileceği cebirsel yapıların bulunması gibi konularla ilgilenir. Çizgeler, grafikler, grup teorisini, sıra kuramını bu şemsiyenin altında düşünebiliriz.

– Soyut matematik elbette aynı zamanda şekillerle de ilgilenir. Hepimizin bildiği Öklid geometrisi temelde olmak üzere, trigonometri, son zamanlarda işin içine buçuklu boyutları bize tanıtan fraktal geometrinin katılması ile geometri daha eğlenceli bir hal almaya başladı elbette.

Tabi topoloji yani daha sevimli adıyla lastik geometriyi de unutmamak lazım. Aslında farklı bir yerlerde de olabilir elbette ama adından da anlaşıldığı gibi ölçümlerle ilgilenen ölçüm teorisini de burada analım. Ve son olarak eğriler ve yüzeylerle ilgilenen diferansiyel geometri kaldı geriye. Her biri hakkında anlatılacak çok şey var ama biz ana başlıkları öğrenelim şimdilik.
– Bir de değişimleri ifade edebilmek için matematiğe ihtiyaç duyarız. Kalkülüs içinde bolca türev ve integral barındırarak matematiksel analizin başlangıcıdır aslında. Temelde fonksiyonlarla ilgilenir elbette.

Vektör kalkülüste aynı işe vektörler için yapar. Buraya başka şeylerde eklemek gerekirse dinamik sistemlerden bahsedebiliriz. Dinamik sistem geometrik uzay katmanındaki bir noktanın zamana bağlı durumunu tarif eder. Akışkanlar dinamiği, kaos teorisi ve karmaşık değişkenli fonksiyonları araştıran kompleks analizi bu grupta tanımlayabiliriz.

Arada atladıklarımız oldu elbette soyut matematikte, amacımız öne çıkan ifadeleri size duyurmaktı sonuçta. Şimdi birazda uygulamalı matematiğe göz atalım. Ancak bir kere daha hatırlatalım. Matematikte her şey birbiri ile ilintilidir.

– Bir başka grupta da matematiği yapısal özellikleri ile ele alabiliriz. Bu sefer işin içine denklemler ve dolayısıyla cebir karışmaya başlar. Yapılar dediğimiz zaman aklımıza aynı zamanda vektörler, matrisler de gelir. Her yeni sistemin özellikleri de vardır elbette bunu incelemekte lineer cebirin işidir.

– Soyut matematikte bir de kombinatorik dediğimiz kısım vardır. Adı gibi uğraştığı alt konularda gariptir, soyuttur aslında. Kombinatorik belirli kriterleri karşılayan nesnelerin sayılması, kriterleri karşılayan nesnelerin inşa ve analiz edilmesi, bu nesnelerin sahip olabileceği cebirsel yapıların bulunması gibi konularla ilgilenir. Çizgeler, grafikler, grup teorisini, sıra kuramını bu şemsiyenin altında düşünebiliriz.
– Soyut matematik elbette aynı zamanda şekillerle de ilgilenir. Hepimizin bildiği Öklid geometrisi temelde olmak üzere, trigonometri, son zamanlarda işin içine buçuklu boyutları bize tanıtan fraktal geometrinin katılması ile geometri daha eğlenceli bir hal almaya başladı elbette.

Dedik ya uygulamalı matematiğin amacı temelde gerçek hayatta karşılaşılan sorunlara çözüm üretmektir. Mesela fizik ile başlayalım işe. Aslında fizik soyut matematikteki her kavramı kullanmak zorundadır. Matematiksel fizik ve teorik fizik olarak kendi içinde ayrılsa da bu gerçek değişmez. Kimya ve biyoloji de belli bir oranda matematikten nasibini alır. Ancak elbette matematik ağırlıklı olarak mühendislikte karşımıza çıkmaktadır. Kontrol teorisi doğadaki fiziksel olayların diferansiyel denklemler yardımı ile modellenmesi ve sistemlerin verimini optimize etmek üzerine kurulmuştur.

Nümerik analiz değişik matematiksel problemlere sayısal çözümler elde etmek içim algoritmaların çalışmasını, geliştirilmesini ve analizini içerir.

Oyun kuramı, İstatistik biliminin, sosyal bilimlerde, biyoloji, mühendislik, politik bilimler, ekonomi, bilgisayar bilimleri ve felsefede kullanılan bir dalıdır.

Olasılık bir şeyin olmasının veya olmamasının matematiksel değeri veya olabilirlik yüzdesi ile ilgilenir. Hayatımızın her alanı ile ilgili olduğunu söylemeye gerek yok elbette. Bayes teoremi de olasılık kuramı içinde incelenen önemli bir konudur. Bu teorem bir değişken için olasılık dağılımı içinde koşullu olasılıklar ile marjinal olasılıklar arasındaki ilişkiyi gösterir.

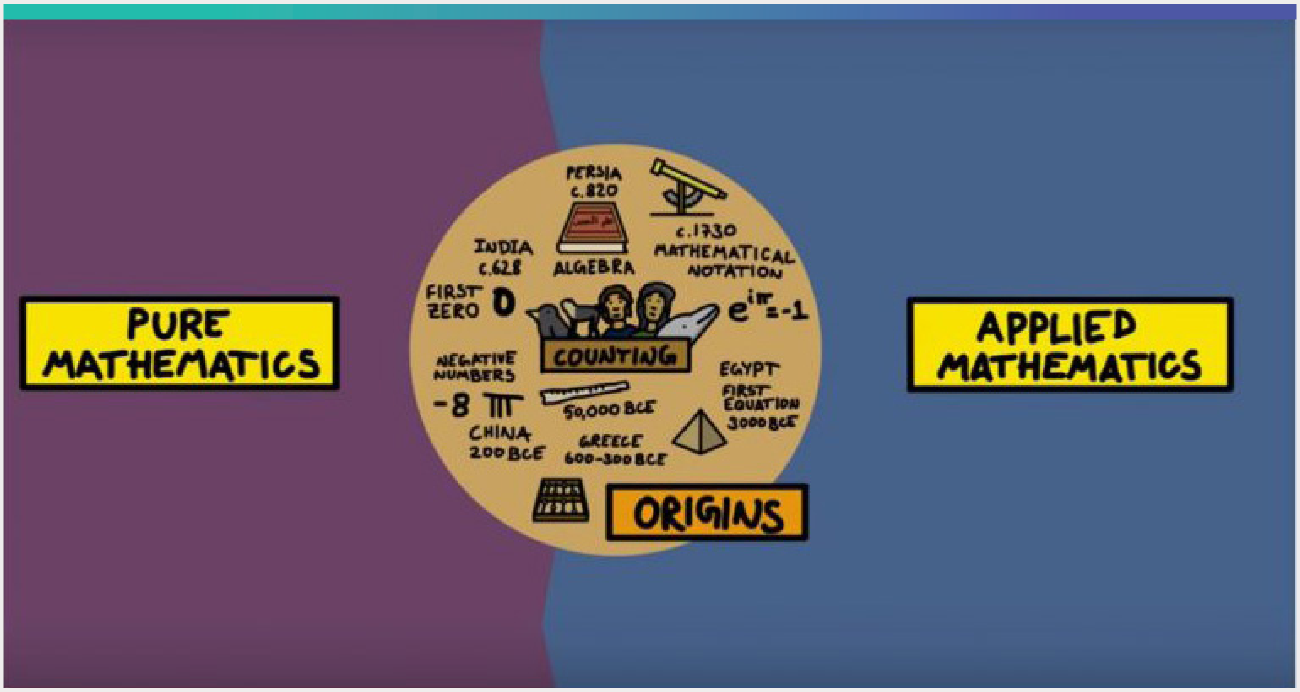
İstatistik gözlemlediğimiz dünya hakkındaki sayıların bizim için ne anlam ifade ettiğini açıklamaya çalışır. Finans matematiğinin işi piyasalar ve paradır elbette. Optimizasyon eldeki kısıtlı kaynakları en optimum biçimde kullanmak olarak tanımlanabilir. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse bir fonksiyonun minimize veya maksimize edilmesidir. Elbette soyut matematikle doğrudan ilgili olan bir başka alanda Bilgisayar bilimidir. Makine öğrenimi, bilgisayarların algılayıcı verisi ya da veritabanları gibi veri türlerine dayalı öğrenimini olanaklı kılan algoritmaların geliştirilmeleri ile ilgilenir ve lineer cebir, optimizasyon, olasılık, dinamik sistemler gibi bir çok diğer alanla yakın ilişki içindedir. Son olarak şifre bilimi olan kriptoloji de sayılar teorisi ve kombinatorik gibi konulara yoğunlaşarak güvenlik konusunda çalışmalarını sürdürür.

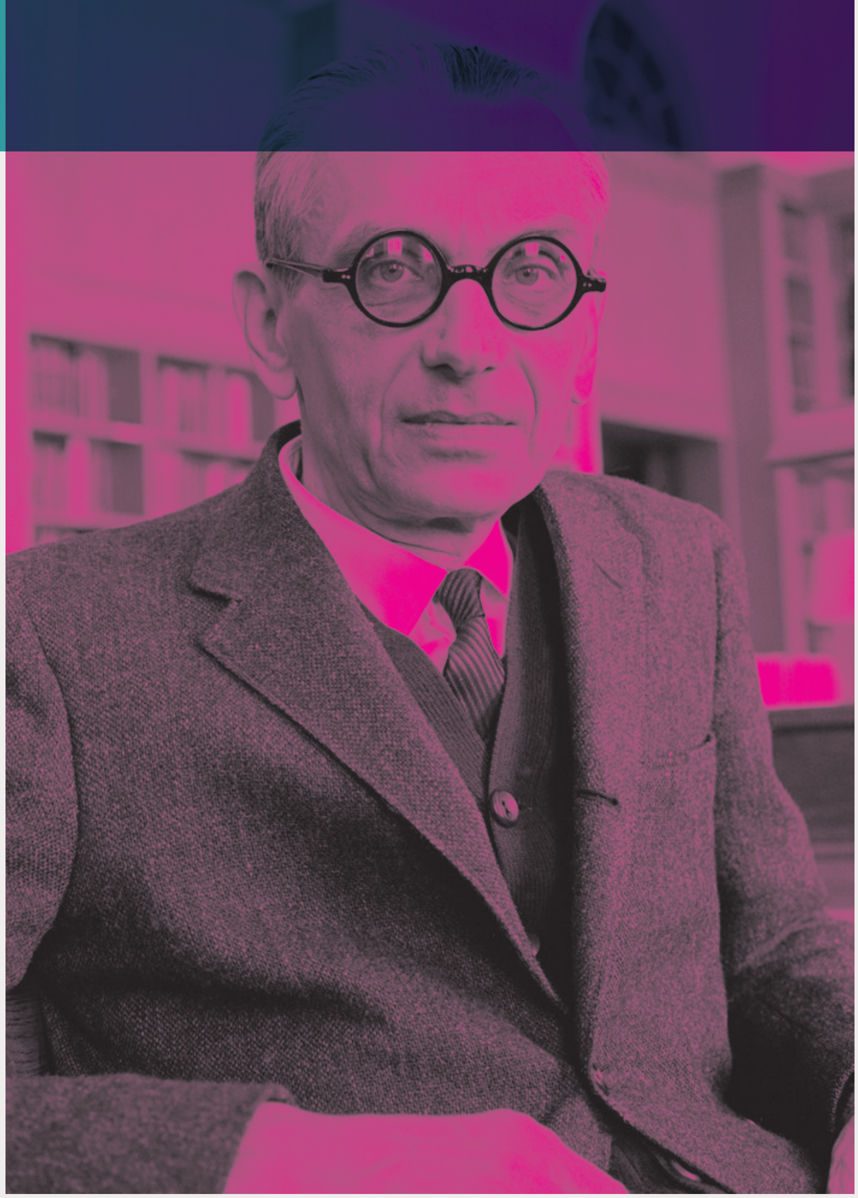
Kabaca matematiğin alanları bunlar daha da detaya girmek gerekirse yazının sonu gelmez. Ancak olmazsa olmaz son bir şeyden daha bahsetmek gerekiyor elbette. Matematiğin kalbini anlatmak lazım, temelini içeren alanı...

Bahsettiklerimizin içinde "matematik mantığın uygulama alanıdır" söyleminden yola çıkarak matematiksel mantık, kümeler kuramı ve matematiksel yapılar ve ilişkilerle soyut olarak ilgilenen kategori teorisi gelebilir akla.

Buralarda bir yerlerde son olarak Hesaplama teorisinden bahsedelim. Bu teori bir problemin belirli bir algoritma ve hesap modeli ile çözülüp çözülemeyeceğini veya çözülürse ne kadar hızlı ve verimli bir şekilde çözüleceğini inceler ve iki bölüme ayrılır ve o da 2 dala ayrılır: Karmaşıklık Teorisi ve Hesaplanabilirlik Teorisi. "P=NP?" sorunu olarak bilinen soru bu alana aittir.

Bitti mi, bitmedi elbette daha anlatılacak çok şey var ancak amacımız size sadece yapıyı göstermeye çalışmaktı başta da dediğimiz gibi. Umarım matematiğe giriş yapanların kafasında birşeyler şekillenmiştir. Yapmanız gereken kal savaş ya da geri çekil taktiği matematikte anlayacağınız...





GÖDEL KANITI

"İnsan tini bütün matematiksel sezgileri fomüle etme yetisine sahip değildir."

1931 yılında bir Alman bilim dergisinde kısa ve ilgi çekici olduğu kadar da düşündürücü bir yazı yayınlandı. Yazının başlığı şöyleydi. 'Uber Formal unentscheidbare Sâtze der Principia Mathematica'(Üzerinde kesin kararlar veremeyeceğimiz matematik prensipleri ve benzeri sistemler). Yazarı ise Viyana Üniversitesinden 25 yaşındaki Kurt Gödel idi.

Bu yazı yayınlandığında, hem yazının başlığı hem de içeriği çoğu matematikçi tarafından bilinmiyordu. Adı geçende 'The principia mathematica' isimli üç bölümden oluşan çalışma Alfred North Whitehead ve Bertnard Russel'in matematikte mantık ve temel mantığın temelleri alanları ile ilgili meşhur çalışmalarıydı.

Bu alanda yetkin denilebilecek az sayıda bilim insanı olması ve konunun sadece belirli bir çevre tarafından izleniyor olması bu Gödel çalışmasının devrim niteliğinde sonuçlar doğurmasını gölgelemedi. Çünkü çalışma gerçekten temel felsefe alanında geniş ve etkin bir yer kaplıyordu.

Çalışması matematiğin merkezinde yer alan temel bir meseleyi ele almıştı.

Temel geometri dersleri alan herkes bilir ki bu disiplin tümdengelim bir yöntem ile öğretilir ve üretilir. Bir çok bilim dalında, doğruya giden yol temelde denemelerle olur, yani oluşturulan teoremlere deneme yanılma yöntemleri ile varılır. Oysa geometride bu olayı başka türlü ele alınır. Baştan bazı şeyleri doğru kabul eder ve bu doğruları temel olarak başka sonuçları elde etmek için kullanır.

Şöyle ki bunu bir örnekle açıklayalım.

Geometri öğrenirken 'İki noktadan ancak ve ancak bir doğru geçer' ifadesini temel bir doğru olarak kabul eder ve sonra karşılaşacak ilgili konularda bu temel veriyi kullanırsınız. Yani ileride karşılaştığınız yeni durumları bunun üzerine teorem olarak inşa eder ve ispatını buna dayanırsınız.

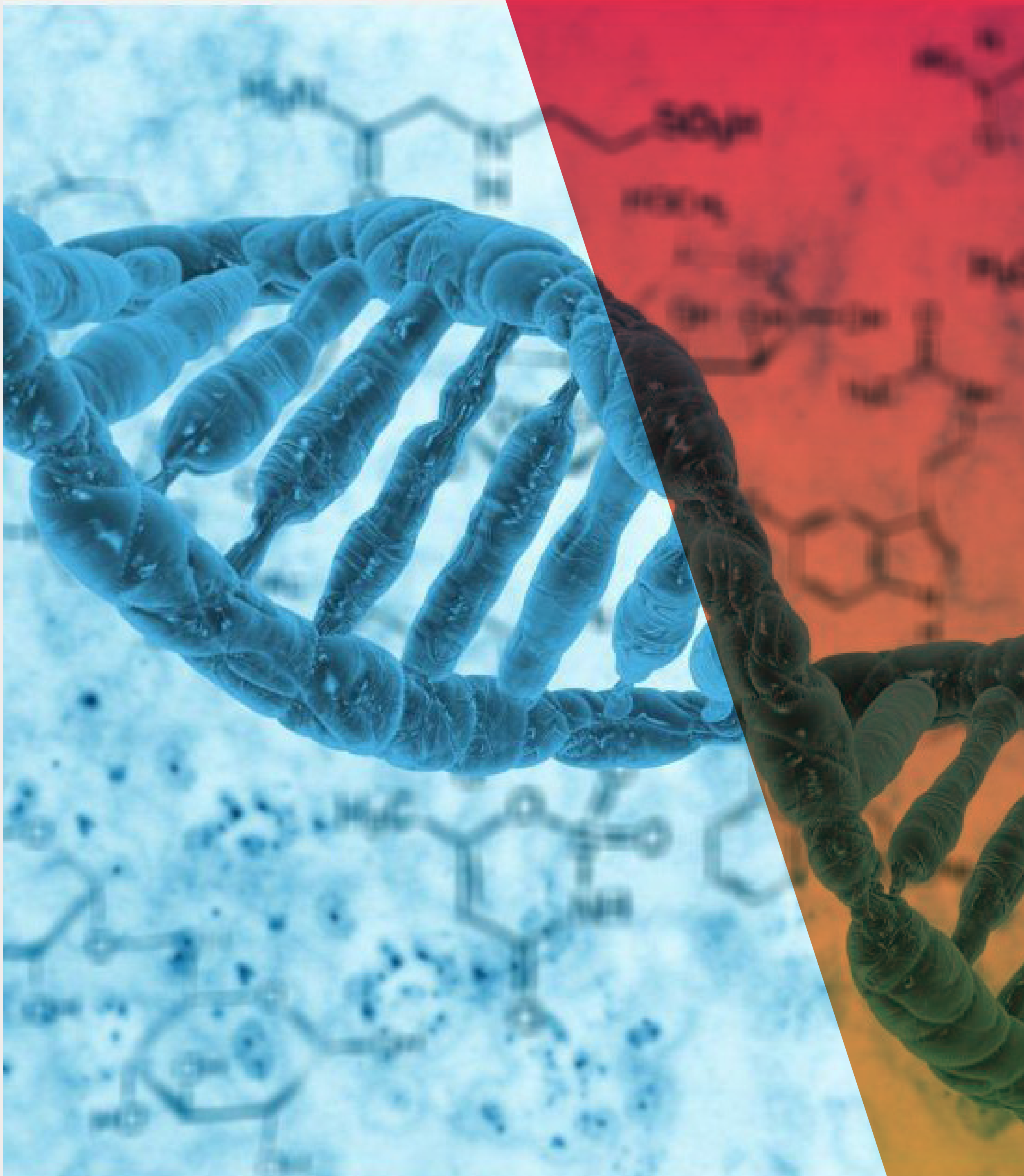
İşte bu mantık çok eskiden beri matematikçileri cezbediyordu. Matematiği bir bütün olarak bu mantığın temeline dayandırmak istiyorlardı.

"The Principia Matheematica" bu özlemin bir ürünüydü. Varılmak istenen, geometrideki gibi (aksiyom) temel kabul edilen doğrulara dayanarak özünde matematik genelde bilim, birbiriyle çelişmeyen doğrular üzerine inşa edilebilir ve tutarlı bir sistem kurulabilirdi.

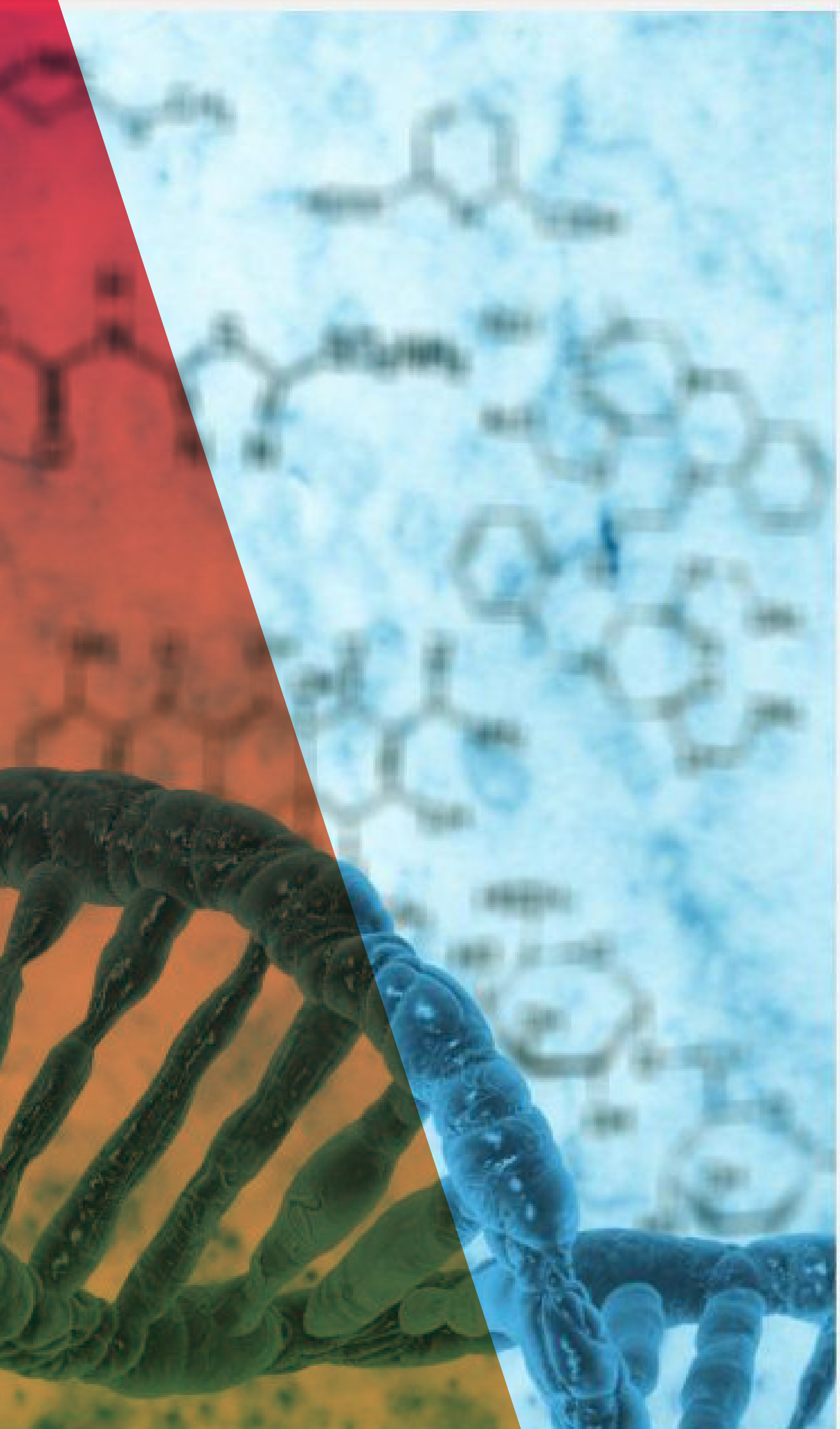
Tarihe "Eksiklik Kanıtı" olarak geçecek Gödel'in bu çalışması bu konuda üzücü bir sonuç bildiriyordu bizlere.

Bir matematik sistemine ait Gödel tipi önermeleri, sisteme aksiyom olarak eklemekle o sistem tamamlanamaz; çünkü, eklenen aksiyomlar, yeni bir matematik sistemi oluşturacak ve bu yeni sistem de kendi Gödel tipi önermelerini içerecek, yani yine eksik kalacaktır.

BİYOMATEMATİK



Matematik ve biyoloji yan yana düşünülmesi zor olan iki kavramdır. Ama gel gör ki dağ dağa kavuşamasa da, iki zıt bilim birbirine kavuşabilir... Biyoloji aslında deneysel bir bilimdir, yani hipotezlerini doğrulamak için deneye ihtiyaç duyar. Ama biyoloji sadece deneyden ibaret de değildir. Deneyle ilgilenen kısma "Deneysel Biyoloji", teorilerle ve bizim de konumuz olan matematiksel biyolojiyle ilgilenen kısma da "Kuramsal / Teorik Biyoloji" denir.



Biyomatematik, aslında matematiksel modellemeler, soyutlamalar ve teknik analizlerin yapıldığı “Uygulamalı Matematik”in bir alt dalıdır. Deneysel biyolojinin yetersiz kaldığı ya da saha çalışmalarının bazı sebeplerden ötürü imkansız olduğu durumlarda matematik imdada yetişir.

Biyolojik bir süreçle ilgili bilgi edinmek istediğimizde o sürecin olup bitmesini beklemek zorunda değiliz. Sürecin değişkenlerini belirledikten sonra matematiksel modelleme* teknikleri, diferansiyel denklemler*, çizge kuramı*, istatistik* gibi matematiksel oyuncaklar sayesinde ve biraz da bilgisayar teknolojilerinin yardımıyla zamanı ileri geri sararak o süreçle ilgili her türlü bilgiyi bazen deney sonuçlarından daha kesin bir doğrulukta öğrenebiliriz.

Şimdi de sıra bizim bu biyomatematiği nerelerde kullandığımızda…

Matematik, biyoloji tarihinde ilk defa 1760 yılında çiçek hastalığının matematiksel analizinde İsviçreli bilim adamı Bernoulli tarafından kullanılmıştır. Zaten 17. yüzyıldan itibaren matematik pek çok bilim dalının yardımına koşmaya başlamıştı. Takip eden yıllarda daha pek çok salgın hastalığın (grip, sıtma, tüberküloz…) modellemesi de çeşitli matematikçiler tarafından yapılmıştır. Bu tür hastalıkların incelenmesi, saha çalışması yapılamayacak kadar pahalı ve bazı durumlarda da bilimsel etiğe aykırı olduğu için sadece modelleme ve simülasyon teknikleri ile yapılabilmektedir. Ayrıca işin içinde çok sayıda nüfus istatistiği ve biyolojik sistem karmaşası vardır ki deney sonuçlarıyla bilgi edinmek neredeyse imkansızdır. Bu yüzden matematiksel yöntemler ve bilgisayar teknolojileri salgın hastalık araştırmalarında en sık kullanılan metodlardır.

Biyomatematiğin bilim dünyasına girmesi yaklaşık 250 yıl önce olsa da popülerleşmesi ve yaygınlaşması 1990’ların başında gerçekleşir. 2000’li yıllara gelindiğinde ise ortaya biyoterörizm denen bir terör türü çıkar. Artık virüsler, özellikle de HIV virüsü, ve çeşitli bakteriler teröristlerin eline bir silah olarak geçmiştir. Bunun üzerine dünyadaki sayılı biyomatematikçiler olası bir saldırıya karşı hastalıkların yayılma ve durdurulma modellemelerini ortaya koydular.

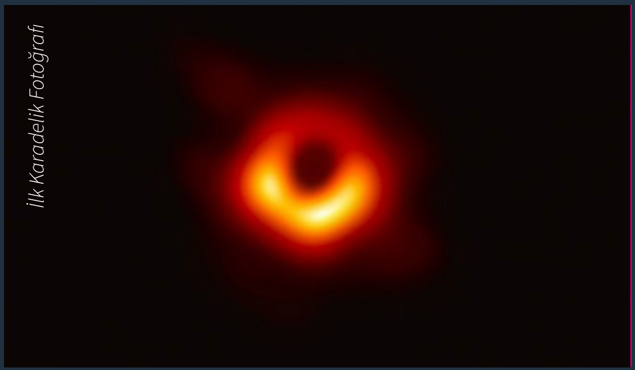
Görüldüğü gibi matematik sadece soyut konularla ilgilenen ya da sadece mühendislerin hesaplama yaparken kullandığı bir bilim değildir. Özü itibariyle matematik; kendine has sembolleri, kuralları ve yöntemleri olan doğru düşünme sanatıdır.
Matematik doğa bilimlerinden farklı olarak özel bir çalışma ortamına ya da laboratuvara ihtiyaç duymaz. Matematik yapmak için ihtiyacınız olan şeyler; iyi arkadaşlar, ilham veren bir ortam, duru bir kafa ve kağıt kalemdir.
Zannedildiği gibi biyoloji de sadece ezbere dayalı bir bilim değildir. İşte biyomatematik bu iki geniş bilim dalının arasında bir köprü vazifesi görmektedir. Disiplinler arası bir dal olması sebebiyle iki dalda da uzmanlık gerektirdiği düşünülse de dünya genelinde matematik bölümü mezunları biyoloji alt yapısına sahip olmadan bu alanda çalışabilmektedirler.
Türkiye’de ise yeni gelişmekte olan ama üniversitelerin çok da önemsemediği bir alandır. Ders olarak ise tıp, hemşirelik ve ebelik bölümlerinde biyoistatistik adı altında matematiksel istatistik okutulmaktadır. Ülkemizde de bu alanda yetkin matematikçiler yetişmesi dileğiyle…

KARADELİKLER DE ÖLÜMLÜDÜR

Hepimiz karadelikten ışığın bile kaçamadığını biliriz. Ancak karadelikten kaçabildiği düşünülen bir şey var.

Kuantum fiziği ile Albert Einstein'ın genel görelilik teorisini belli ölçüde birlikte kullanan Cambridge Üniversitesi profesörlerinden Stephen Hawking, 1970'lerin başında yaptığı oldukça ünlü çalışmasında şu sonuca ulaşmıştır: "Kara delikler çok da kara değiller!" Bu kısa yazıda, Hawking'in ne demek istediğini anlamaya çalışacağız. Princeton Üniversitesi'nden John A. Wheeler 1967'de "kara delik" ismini vermeden önce bu nesneler "çökmüş yıldız" veya "donmuş yıldız" olarak biliniyorlardı.

Kara delikler ve evrenin büyük patlama zamanındaki durumu, kuantum fiziği ile çekim teorilerinin aynı anda etkin oldukları ve beraber uygulanmalarının zorunlu olduğu iki alandır. Bu yazıya konu olan kara deliklerin "termodinamiği", "radyasyon-ışık yayması" ve "ölümleri" (bu kavramları kısaca izah edeceğiz) henüz teorik seviyede olan bilgilerdir, elimizde astrofizikten veri yoktur. Bu konudaki bütün çalışmalar teoriktir. Örneğin, teorik fizik literatüründe "Kara deliklerin son 8 dakikası" gibi başlıklara sahip makaleler bulmak mümkündür.


İlk Karadelik Fotoğrafı

Karadelikler de Ölümlüdür

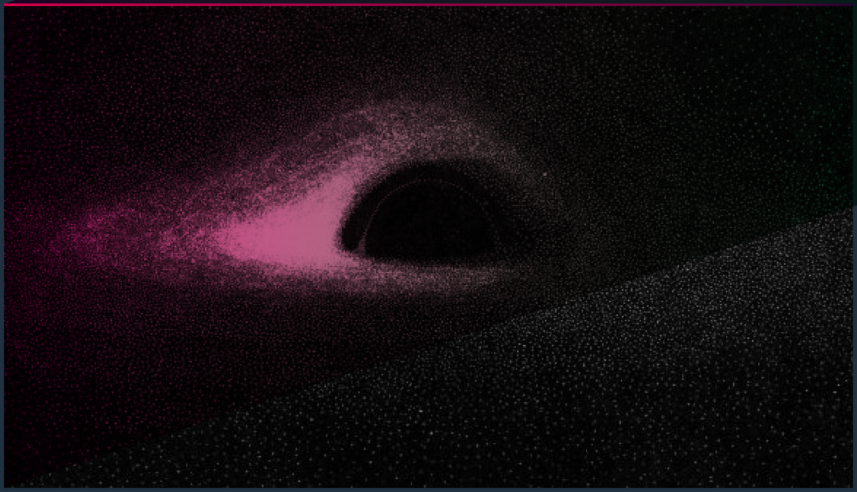
Jean-Pierre Luminet, kara delikleri anlatırken eski bir Acem hikâyesinden bahseder:

Kelebekler ateşin-alevin mahiyetini, ne olduğunu anlamak için bir araya gelirler. Ortaya pek çok model atılır ama hiç birisi pek ikna edici değildir. Cesur bir kelebek, gidip ateşe bakıp gerçeği öğreneceğini söyler. En yakın kaleye gider, mum alevini izler ve arkadaşlarının yanına döner. Gördüklerini anlatır ama kelebeklerin büyüğü olan bilgin kelebek açıklamayı tatmin edici bulmaz ve şöyle der:

"Daha önceki bilgilerimizin üstüne bir şey koyamadık."

İkinci bir kelebek, alevi anlamak için yola çıkar, kanatlarından birisini mum alevine değdirir ve bin bir güçlükle geri döner, yaşadıklarını anlatır. Bilgin kelebek yine tatmin olmamıştır, üçüncü bir kelebek yola çıkar ve kendisini aleve atar, yanar. Uzaktan bu durumu izleyen bilgin kelebek hükmü verir: “Dostumuz, alevin sırrını öğrendi ama bu sırrı sadece o bilebilir!” Kelebeklerden biraz daha zor durumdayız: Kara deliklerin sırrını, asla geri dönemeyecek cesur bir astronotun da öğrenmesi mümkün değil, çünkü yakınımızda kara delik yok! Güneşten çok daha büyük yıldızların sonu pek hazindir: Nükleer yakıtları bitince, ışığın kaçmasını tolere edemeyecek kadar yoğunlaşırlar ve klasik genel görelilik teorisine göre, kütleleri ile orantılı olarak uzayın bir parçasını, çıkışı olmayan bir hapishaneye çevirirler.

Bu (küresel) hapishanenin fiziksel bir materyalden “oluşmayan”, “görünmez”, tek taraflı geçirgen bir duvarı vardır: Bu duvara “olay ufku” denir. Burada önemli olan kavram “yoğunluk”tur. Dünya’nın kara delik olabilmesi için bir kestane küçüklüğüne sıkıştırılması gerekmektedir. Güneş’in de kara delik olabilmesi, yarı-çapının 3 kilometreye inmesi ile mümkündür.



BİLGİSAYARLAR NASIL RASTGELE SAYI ÜRETİYORLAR?

Son zamanlarda bilgisayarlarca üretilen rastgele sayılar ve nitelikleri sıklıkla tartışılır oldu, çünkü birçok insan Intel'in gömülü yongalarındaki rastgele sayı üretiminin yeterince güvenilir olup olmadığını sorguluyor.

Rastgele sayılar binlerce yıldır kullanılıyor. İster yazı-tura atın, ister zar kullanın, temelde amaç sonucu saf şansa bırakmaktır. Bilgisayardaki rastgele sayı üreteçleri de aynıdır, amaç tahmin edilemeyen, rastgele bir sonuca ulaşmaktır.

Rasgele sayıların kullanım alanları sandığımızdan çok daha fazladır. En belirgin olan şans ve video oyunlarındaki uygulamalarının yanı sıra şifreleme bilimi için de oldukça önemlidir.

Şifreleme biliminde (kriptografi) olası bir saldırı durumunda saldırganın tahmin edemeyeceği bir sayı kullanmanız gerekir. Bu sebeple aynı sayıyı defalarca kullanamazsınız. Dolayısıyla bu sayıları saldırganın tahmin etmesinin güç olduğu bir şekilde üretmelisiniz. İster kendi dosyalarınızı şifreleyin, ister HTTPS protokolü kullanan bir internet sitesi kullanın, bu rastgele sayılara fazlasıyla ihtiyacınız var.

Neden İhtiyacımız Var?

Gerçek Rastgele Sayılar

Peki, bir bilgisayar bunları nasıl üretir? Bu "rastgelelik" özelliği nereden geliyor? Bu yalnızca bir kod parçasıysa ortaya çıkan sayının tahmin edilebilir olması gerekmez mi?

Dediğimiz gibi, üretim şekillerine göre rastgele sayıları ikiye ayırıyoruz: gerçek ve sözde rastgele sayılar.

Bir gerçek rastgele sayı üretmek için bilgisayar, kendisinin dışında gerçekleşen bir fiziksel fenomeni ölçer. Örneğin bir radyoaktif atomun bozunmasını. Kuantum teorisine göre radyoaktif bozunmanın ne zaman gerçekleşeceğini bilmenin hiçbir yolu yoktur. Yani bu "saf rastgelelik"tir. Bir saldırgan bozunumun ne zaman gerçekleşeceğini bilemeyeceğinden oluşturulan rastgele sayıyı da bilemeyecektir.

Elbette kişisel bilgisayarımızda rastgele sayı üretmek için cebimizde radyoaktif atom taşımamıza gerek yok. Bilgisayarlar atmosferik gürültüyü veya klavyenizdeki herhangi bir tuşa basma anınızı tahmin edilemeyen verinin kaynağı olarak veya entropi olarak kullanabilirler. Diyelim ki klavyenizdeki bir tuşa saat sabaha karşı 02.00'den tam olarak 0.23423523 saniye sonra bastınız. Bilgisayarınız bu tuşa basma verilerini toplayarak bir entropi kaynağı oluşturup buradan gerçek rastgele sayılar üretebilir. Sonuçta siz tahmin edilebilir bir makine değilsiniz, dolayısıyla bir saldırgan tam olarak hangi anda tuşa basacağınızı bilemez ve böylece bu bilgiyi kaynak olarak üretilen rastgele sayıyı da tahmin edemez.

Sözde Rastgele Sayılar

Sözde rastgele sayılar gerçek rastgele sayılara alternatif olarak üretilen sayılardır. Bilgisayar çevreden herhangi bir veri almaksızın, "tohum(seed)" olarak verilen bir değer üzerinden bir algoritma kullanarak özünde tahmin edilebilen ama ilk bakışta rastgele görünen sayılar üretebilir.

Aslında bu her zaman için kötü bir uygulama sayılmaz. Bir video oyunu oynuyorsanız gelişen olayların gerçek rastgele sayıla kullanılarak mı yoksa sözde rastgele sayılarla mı oluşturulduğunun çok önemi yoktur. Fakat şifreleme işlemleri yapıyorsanız kullandığınız sayıların bir saldırgan tarafından tahmin edilmesini istemezsiniz.

Diyelim ki bir verinizi şifrelemek için oluşturduğunuz anahtarı gerçek rastgele sayıları kullanmak yerine sözde rastgele sayıları kullanarak oluşturdunuz. Bu rastgele sayıları üretmek için bir tohuma (basitçe, sözde rastgele sayılarınızı üreten algoritmada kullanmak için seçtiğiniz ilk sayı olarak düşünebiliriz) ve bir rastgele sayı üreten algoritmaya ihtiyacınız var. Eğer verinizin peşindeki saldırgan yeterince uğraşırsa kullandığınız sözde rastgele sayı üretici algoritmayı ve tohumu bulup şifreleme anahtarınızı hesap edip şifreli verinizden asıl veriye ulaşabilir.

NSA ve Intel'in Donanım Temelli Rastgele Sayı Üreteci

Geliştiricilerin işlerini kolaylaştırmak ve güvenilir rastgele sayı üretebilmek için Intel yongalarında RdRand isimli donanım temelli bir sistem bulunur. Bu yonga, işlemci üzerindeki bir entropi kaynağını kullanır ve istendiğinde yazılıma rastgele sayı sağlar. Fakat problem şu ki, bu rastgele sayı üreteci adeta bir kara kutu ve içinde neler döndüğünü bilemiyoruz. Eğer bu sistem Amerikan Ulusal Güvenlik Dairesi'ne (NSA) bir arka kapı sağlıyorsa, bu Amerikan hükûmet yalnızca bu sistemden sağlanan rastgele sayılar kullanılarak oluşturulmuş anahtarlarla yaratılan şifreleri çözebilir demektir.

Böyle bir güvenlik açığının olma ihtimali birçok insanı endişelendirmeye yetiyor. Bazı geliştiriciler sadece bu sistemden sağlanan rastgele sayıları direkt olarak kullanmamayı tercih ediyorlar. Linux böyle çalışanlar arasında. RdRand ile gelen rastgele sayıları daha da rastgele hale getirerek hükûmet sağlanmış bir arka kapı olması ihtimaline karşı verilerini korumaya çalışıyor.

YIAFLMATHS

E-DERGİ

HAZIRLAYANLAR

Samet ZENGİN ve Yusuf Tuna EKMEKÇİ